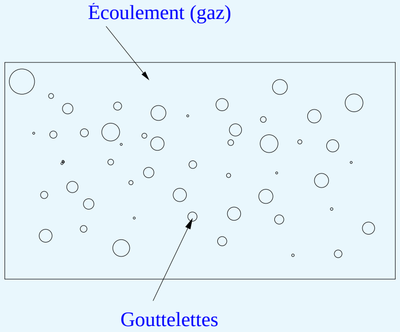
Etude de sprays épais dans un cadre fortement collisionnel

Julien Mathiaud
mathiaud@cmla.ens-cachan.fr



Directeurs de thèse :

Benoît Desjardins (CEA/DAM/ Bruyères-le-Châtel)
Laurent Desvillettes (ENS Cachan)

Plan de l’exposé

- Présentation du modèle gaz-particules

Plan de l’exposé

I **Présentation du modèle gaz-particules**

II **Modélisation du noyau de collision dans le cadre du CEA**

Plan de l'exposé

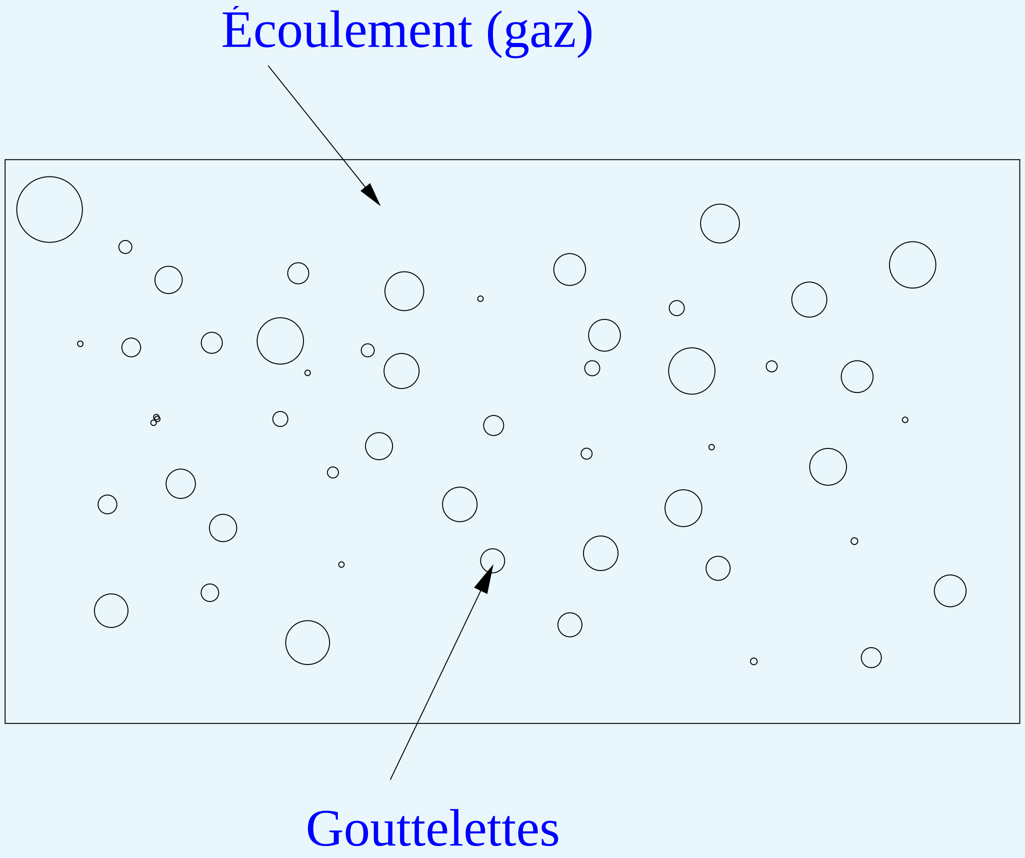
I **Présentation du modèle gaz-particules**

II **Modélisation du noyau de collision dans le cadre du CEA**

III **Limite hydrodynamique dans un cadre fortement collisionnel**

I Présentation du modèle gaz-particules

Les sprays = gaz avec gouttelettes en suspension



Sprays : le fluide environnant

√ Fluide environnant : décrit par la mécanique des fluides compressibles

Quantités macroscopiques (dépendant de (t, x))

- ⋆ densité $\rho_g(t, x)$
- ⋆ vitesse $u_g(t, x)$
- ⋆ énergie totale spécifique $E_g(t, x)$
- ⋆ pression $p(t, x)$

Système fluide classique

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho_g + \nabla_x \cdot (\rho_g\, u_g) &= 0, \\
\partial_t (\rho_g\, u_g) + \nabla_x \cdot (\rho_g\, u_g \otimes u_g) + \nabla_x p &= 0, \\
\partial_t (\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot ((\rho_g\, E_g + p) u_g) &= 0, \\
p_g = P(\rho_g, e_g) &
\end{aligned}
$$

Sprays : la phase dispersée

- √ Phase dispersée (gouttelettes) : décrite par la théorie cinétique de Boltzmann

  Fonction de densité de probabilité $f(t, x, v, ...)$ où x position, v vitesse...

  Équation cinétique

$$\partial_t f + \underbrace{\nabla_x \cdot (vf)}_{\text{terme de transport}} = \underbrace{Q(f)}_{\text{terme de collision}}$$

- √ on peut rajouter d'autres paramètres physiques (comme l'énergie interne e_p) dans la pdf afin d'enrichir la physique

Sprays : équation fluide-cinétique

- √ Un spray (fluide + phase dispersée) est décrit par un couplage fluide-cinétique
- √ Une nouvelle variable: α, fraction volumique du gaz ($\alpha(t,x)$)
- √ Classification des sprays

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha\,\rho_g) + \nabla_x\cdot(\alpha\,\rho_g\,u_g) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\,\rho_g\,u_g) + \nabla_x\cdot(\alpha\,\rho_g\,u_g\otimes u_g) + \nabla_x p &= \int_{u_p,e_p} -m_p\,\Gamma\,f\,du_p de_p, \\ \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \nabla_v\cdot(f\,\Gamma) &= Q(f), \end{aligned}$$

fins	modérément épais	épais
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1 - \int_{v,e_p} \frac{4}{3}\pi\,r_p^3\,f\,dvde_p$
$m_p\,\Gamma = D_p(u_g - u_p)$	$m_p\,\Gamma = D_p(u_g - u_p)$	$m_p\,\Gamma = D_p\,(u_g - u_p) - \frac{4}{3}\pi\,r_p^3\,\nabla_x p$
$Q(f) = 0$		

Modélisations des échanges entre le gaz et les particules

√ Echange de quantité de mouvement

Γ: accélération des particules

$$\begin{aligned} m_p\Gamma &= \text{force de pression + force de traînée} \\ &= -\frac{m_p}{\rho_p}\nabla_x p - D_p(u_p - u_g) \end{aligned}$$

Modélisations des échanges entre le gaz et les particules

√ Echange de quantité de mouvement

Γ: accélération des particules

$$
\begin{aligned}
m_p\Gamma &= \text{force de pression + force de traînée} \\
&= -\frac{m_p}{\rho_p}\nabla_x p - D_p(u_p - u_g)
\end{aligned}
$$

√ Echange de chaleur

ϕ: chaleur échangée par le gaz avec les particules

$$m_p\phi = 4\pi r_p \lambda Nu(T_g - T_p)$$

m_p , r_p: masse et rayon des particules
D_p , Nu , λ: coefficient de traînée , nombre de Nusselt, conductivité thermique

Equations du système gaz-particules

√ Equations du gaz

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g \otimes u_g) + \nabla_x p = -\int_{u_p,e_p} m_p \Gamma f du_p de_p$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g \left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right) u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$

$$\int_{u_p,e_p} -(m_p\Gamma + \frac{m_p}{\rho_p}\nabla_x p) \cdot u_p f du_p de_p - \int_{u_p,e_p} 4\pi r\lambda Nu(T_g - T_p) f du_p de_p$$

Equations du système gaz-particules

- Equations du gaz

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g \otimes u_g) + \nabla_x p = -\int_{u_p,e_p} m_p \Gamma f du_p de_p$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g \left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right) u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$

$$\int_{u_p,e_p} -(m_p\Gamma + \frac{m_p}{\rho_p}\nabla_x p) \cdot u_p f du_p de_p - \int_{u_p,e_p} 4\pi r\lambda Nu(T_g - T_p) f du_p de_p$$

- Equation de Vlasov

$$\partial_t f + u_p \cdot \nabla_x f + \nabla_{u_p} \cdot (f\Gamma) + \partial_{e_p}(f\phi) = Q(f,f)$$

Equations du système gaz-particules

√ Equations du gaz

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g \otimes u_g) + \nabla_x p = -\int_{u_p,e_p} m_p \Gamma f du_p de_p$$

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g \left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right) u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$

$$\int_{u_p,e_p} -(m_p\Gamma + \frac{m_p}{\rho_p}\nabla_x p) \cdot u_p f du_p de_p - \int_{u_p,e_p} 4\pi r\lambda Nu(T_g - T_p) f du_p de_p$$

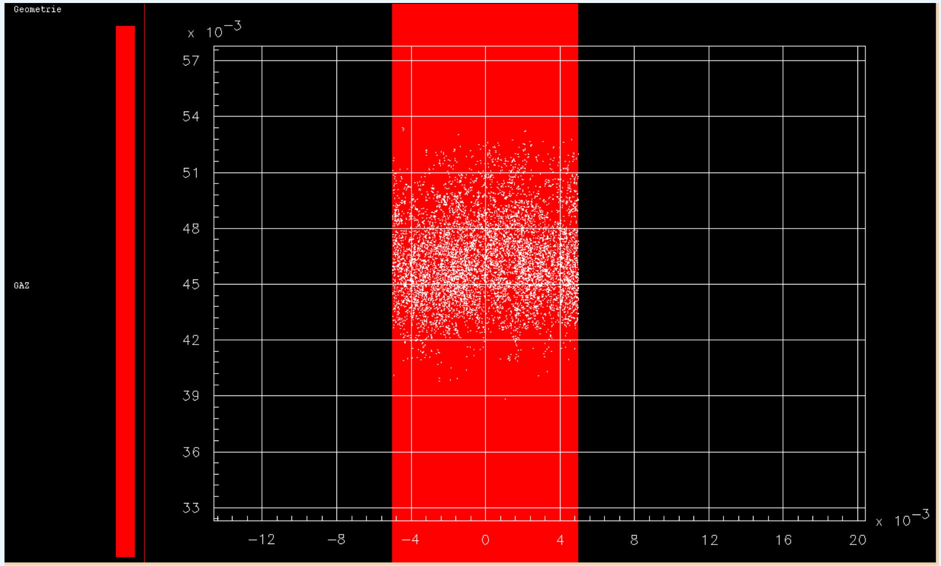
√ Equation de Vlasov

$$\partial_t f + u_p \cdot \nabla_x f + \nabla_{u_p} \cdot (f\Gamma) + \partial_{e_p}(f\phi) = Q(f,f)$$

√ Equations d'état

$$T_g(t,x) = T_1(\rho_g, e_g) \quad , \quad p(t,x) = P_1(\rho_g, e_g) \quad , \quad T_p = T_2(e_p)$$

II Modélisation du noyau de collision



Mécanisme de collision

$$particule^{(1)} + particule^{(2)} \longrightarrow particule^{(3)} + particule^{(4)}$$

Les particules sont de masse m_p, de vitesse u_{p_i} et d'énergie interne e_{p_i}.
Les collisions peuvent être inélastiques de paramètre d'inélasticité β.

√
- $u_{p_3} = \dfrac{u_{p_1} + u_{p_2}}{2} + \beta \dfrac{|u_{p_1} - u_{p_2}|}{2}\sigma$: vitesse post-collisionnelle
- $u_{p_4} = \dfrac{u_{p_1} + u_{p_2}}{2} - \beta \dfrac{|u_{p_1} - u_{p_2}|}{2}\sigma$: vitesse post-collisionnelle
- $\Delta E_c' = \dfrac{1}{2}({u_{p_1}}^2 + {u_{p_2}}^2 - {u_{p_3}}^2 - {u_{p_4}}^2) = \left(\dfrac{1-\beta^2}{4}\right)(u_{p_1} - u_{p_2})^2 > 0$: perte d'énergie cinétique

Mécanisme de collision

$$particule^{(1)} + particule^{(2)} \longrightarrow particule^{(3)} + particule^{(4)}$$

Les particules sont de masse m_p, de vitesse u_{p_i} et d'énergie interne e_{p_i}.
Les collisions peuvent être inélastiques de paramètre d'inélasticité β.

√
- $u_{p_3} = \dfrac{u_{p_1} + u_{p_2}}{2} + \beta \dfrac{|u_{p_1} - u_{p_2}|}{2}\sigma$: vitesse post-collisionnelle
- $u_{p_4} = \dfrac{u_{p_1} + u_{p_2}}{2} - \beta \dfrac{|u_{p_1} - u_{p_2}|}{2}\sigma$: vitesse post-collisionnelle
- $\Delta E'_c = \dfrac{1}{2}({u_{p_1}}^2 + {u_{p_2}}^2 - {u_{p_3}}^2 - {u_{p_4}}^2) = \left(\dfrac{1-\beta^2}{4}\right)(u_{p_1} - u_{p_2})^2 > 0$: perte d'énergie cinétique

√
- $e_{p_3} = \dfrac{2-a}{2}\, e_{p_1} + \dfrac{a}{2}\, e_{p_2} + b\Delta E'_c$: énergie interne post-collisionelle
- $e_{p_4} = \dfrac{2-a}{2}\, e_{p_2} + \dfrac{a}{2}\, e_{p_1} + (1-b)\Delta E'_c$: énergie interne post-collisionelle

a: paramètre d'échange d'énergie interne ($0 \leq a \leq 1$)
b: paramètre de transfert d'énergie cinétique en énergie interne ($0 \leq b \leq 1$)

Estimation de a

Quand deux particules collisionnent, elles restent "collées" pendant un temps de l'ordre: $\Delta T_{coll} = \dfrac{2r_p}{|u_{p_1} - u_{p_2}|}$

Durant ce temps, elles échangent $\dfrac{4\pi\lambda_p r_p (T_1 - T_2)}{m_p}$ en énergie par unité de masse par unité de temps (λ_p: conductivité thermique des particules).

Par ailleurs, on a (avec C : chaleur spécifique des particules),

$$\Delta(T_1 - T_2) = \frac{\Delta(e_{p_1} - e_{p_2})}{C}$$

D'où après intégration: $$a = 1 - \exp\left(-\frac{8\pi\lambda_p {r_p}^2}{C m_p |u_{p_1} - u_{p_2}|}\right)$$

Dans les applications rencontrées a est de l'ordre de quelques $\%$.

Estimation de b et β

- Le choix le plus raisonnable pour b est,

$$b = \frac{m_{p_1}}{m_{p_1} + m_{p_2}}$$

- En utilisant le modèle TAB (Taylor analogy Break-up), on obtient un temps relié à la viscosité,

$$\tau_c = 1 \bigg/ \frac{10\mu_p}{\rho_p r^2}$$

Par un raisonnement analogue à celui sur les transferts thermiques, on obtient

$$\beta = \exp\left(-\frac{\Delta T_{coll}}{\tau_c}\right)$$

Dans les applications rencontrées β est très proche de 1.

Noyau inélastique de collision: $Q(f,f)(t,x,u_p,e_p)$

$$Q(f,f) = \int \Big(\frac{1}{\beta^4|1-2a|}\ {}'f_*{}'f\ -\ f_*f\Big)\, 4\pi\, {r_p}^2\, |u_p - {u_p}^*|$$

$$\chi_{'e_p,'e_{p*}\geq 0}(e_p, e_{p*})\ \phi(a)da\,\psi(b)db\,d\sigma du_{p*}\,de_{p*}$$

- $'u_p = \dfrac{u_p + u_{p*}}{2} + \dfrac{1}{\beta}\dfrac{|u_p - u_{p*}|}{2}\sigma$: vitesse pré-collisionnelle

  $'u_{p*} = \dfrac{u_p + u_{p*}}{2} - \dfrac{1}{\beta}\dfrac{|u_p - u_{p*}|}{2}\sigma$: vitesse pré-collisionnelle

- $'e_p = \dfrac{2-a}{2-2a}\,e_p - \dfrac{a}{2-2a}\,e_{p*} + \dfrac{a-2b}{2-2a}\left(\dfrac{1-\beta^2}{4\beta^2}\right)(u_p - u_{p*})^2$: énergie interne pré-collisionelle

  $'e_{p*} = -\dfrac{a}{2-2a}\,e_p + \dfrac{2-a}{2-2a}\,e_{p*} + \dfrac{a-2+2b}{2-2a}\left(\dfrac{1-\beta^2}{4\beta^2}\right)(u_p - u_{p*})^2$: énergie interne pré-collisionelle

- $\phi(a)$ (resp. $\psi(b)$) : loi de probabilité de a (resp. b).

Noyau élastique de collision: $Q(f,f)$

$$Q(f,f) = \int \Big(\frac{1}{|1-2a|}\, {}'f_*\, {}'f \;-\; f_* f\Big) 4\pi {r_p}^2 |u_p - {u_p}^*|$$

$$\chi_{{}'e_p, {}'e_{p_*} \geq 0}(e_p, e_{p_*})\phi(a) da\, d\sigma du_{p_*}\, de_{p_*}$$

- $${}'u_p = \frac{u_p + u_{p_*}}{2} + \frac{|u_p - u_{p_*}|}{2}\sigma$$: vitesse pré-collisionnelle

  $${}'u_{p_*} = \frac{u_p + u_{p_*}}{2} - \frac{|u_p - u_{p_*}|}{2}\sigma$$: vitesse pré-collisionnelle

- $${}'e_p = \frac{2-a}{2-2a}\, e_p - \frac{a}{2-2a}\, e_{p_*}$$: énergie interne pré-collisionelle

  $${}'e_{p_*} = -\frac{a}{2-2a}\, e_p + \frac{2-a}{2-2a}\, e_{p_*}$$: énergie interne pré-collisionelle

- $\phi(a)$: loi de probabilité de a .

Propriétés du noyau de collision:

La masse m_p, le moment $m_p u_p$ et l'énergie totale $\frac{1}{2} m_p {u_p}^2 + m_p e_p$ sont conservées pendant les collisions donc ces fonctions annulent le noyau de collision $Q(f, f,)$.

Cas inélastique

Pour la fonction $\phi : u_p \hookrightarrow {u_p}^2$ convexe on a:

$$\int Q(f, f)\phi(u_p) du_p de_p \leq 0$$

Cas élastique

Dans ce cas l' énergie interne et l' énergie cinétique sont conservées.

De plus pour toute fonction Ψ convexe on a:

$$\int Q(f, f)\Psi(e_p) du_p de_p \leq 0$$

Données numériques des gouttelettes d'étain

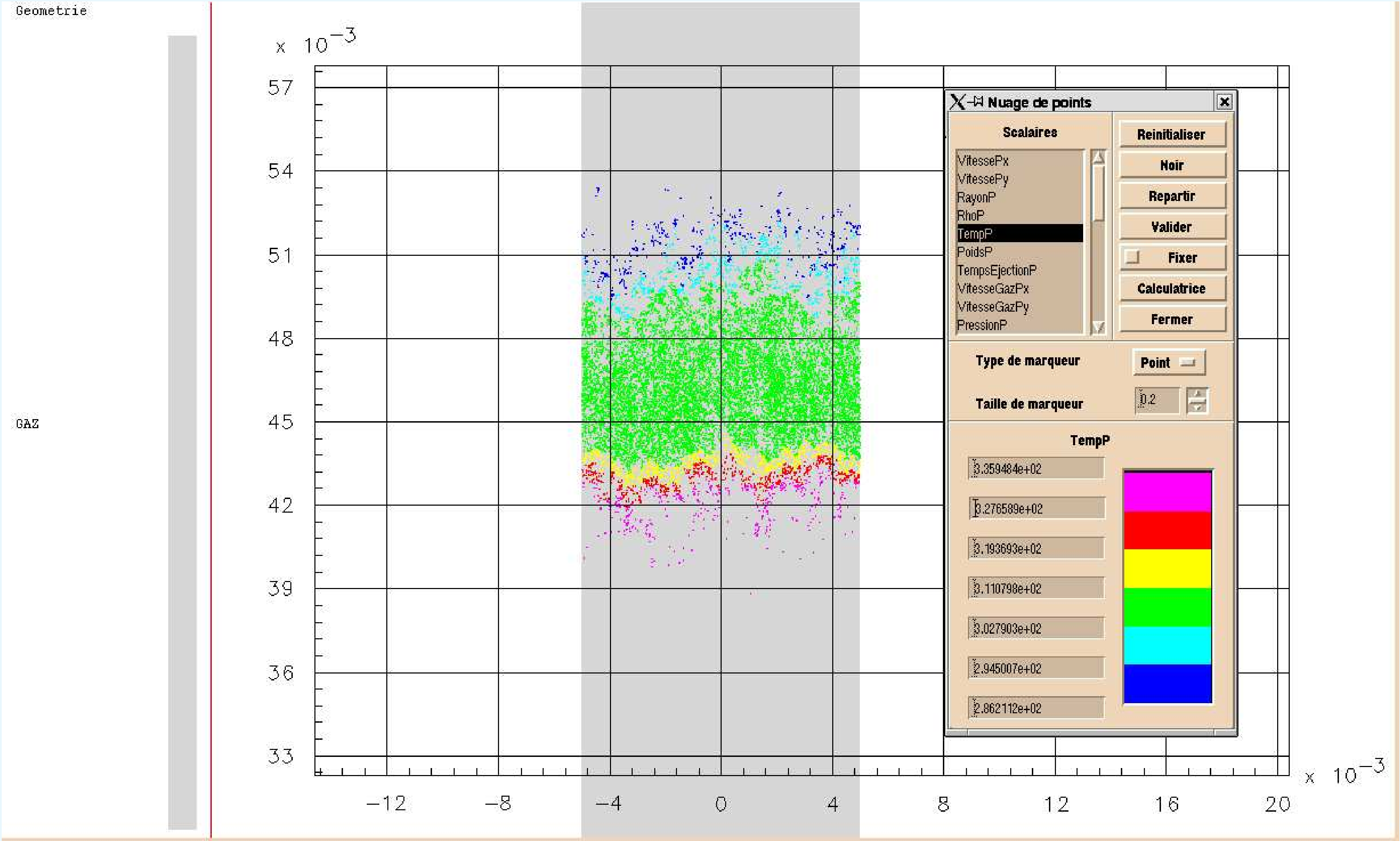
- nombre de particules: 60000
- densité: $7310\, kg.m^{-3}$
- rayon: $10^{-6}\, m$
- vitesse: $200\, m.s^{-1}$
- énergie interne: $10^6\, J.kg^{-1}$
- température: $300\, ^\circ C$
- chaleur spécifique: $200\, J.kg^{-1}.K^{-1}$
- viscosité dynamique: $8.10^{-3}\, Pa.s$
- tension de surface: $0.56\, N.m^{-1}$
- conductivité thermique: $60\, W.m^{-1}.K^{-1}$

- Mesure de β: $\beta \sim 0.89$

- Mesure de a: $a \sim 0.71$

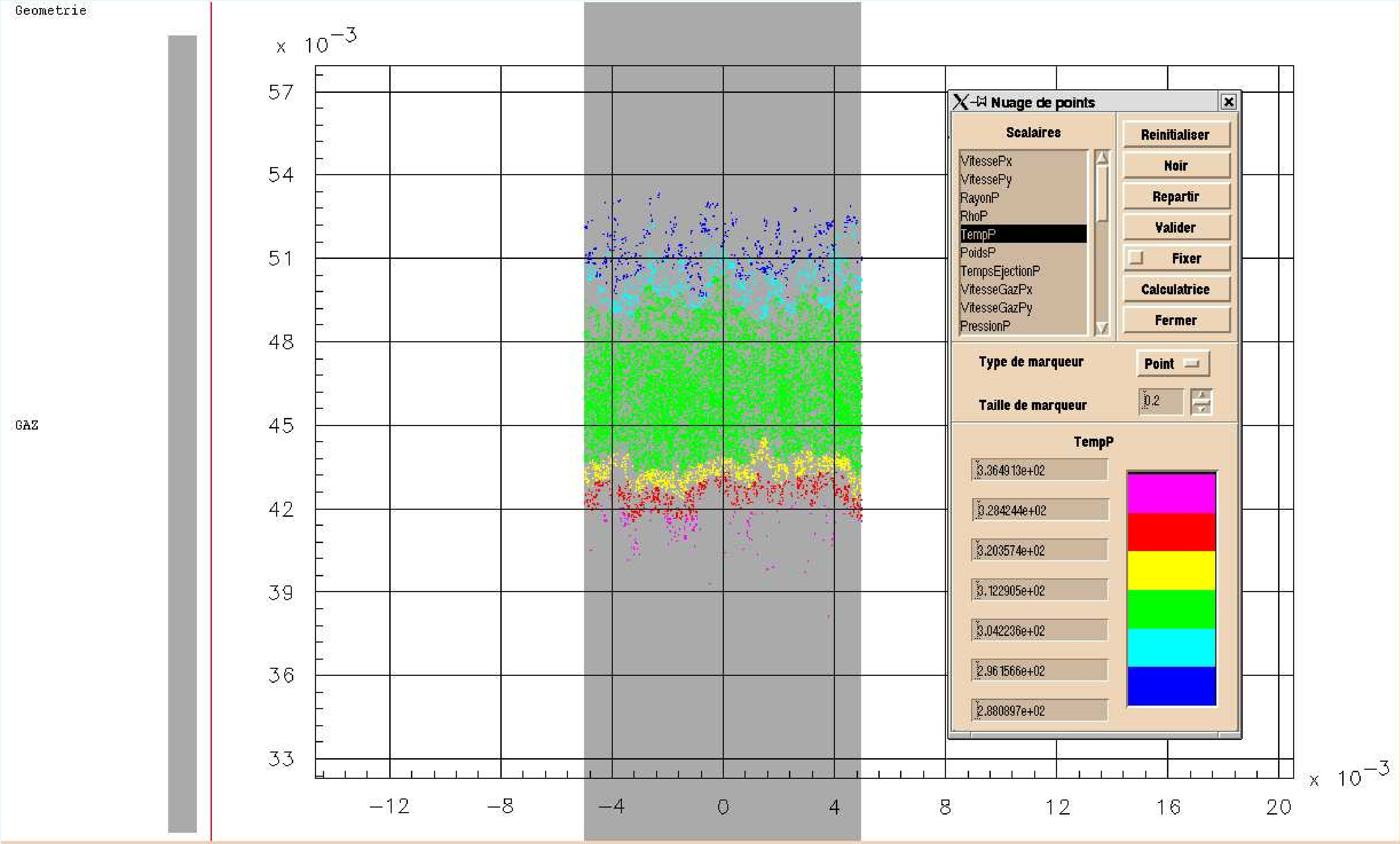
Résultats numériques: effet des échanges thermiques

Cas sans échanges thermiques durant les collisions



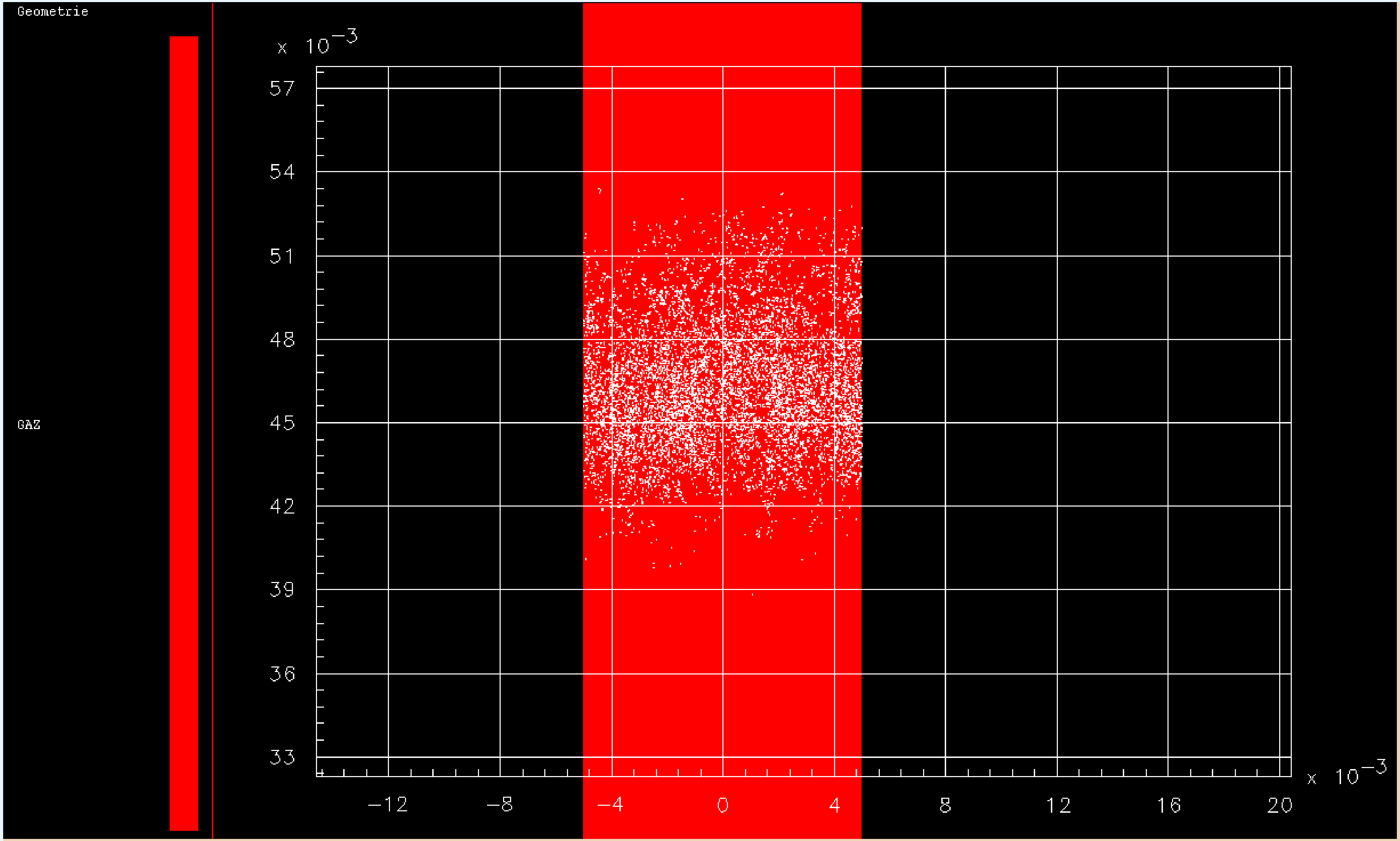
Résultats numériques: effet des échanges thermiques

Cas avec échanges thermiques durant les collisions



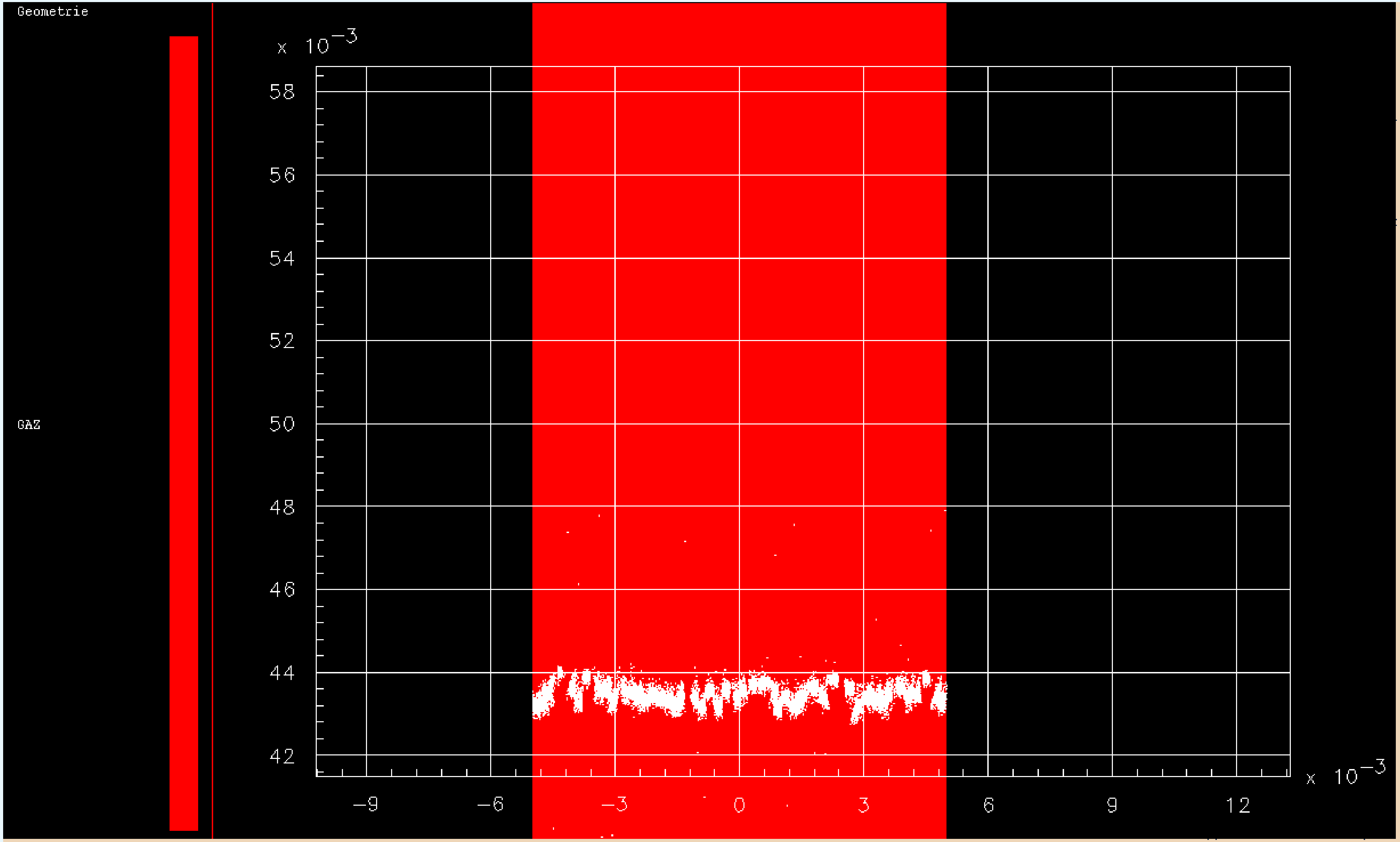
Résultats numériques: effet de l'inélasticité

Collisions élastiques



Résultats numériques: effet de l’inélasticité

Collisions inélastiques



III Limite Hydrodynamique

Fluide de particules: moments de la fonction de distribution

- $\rho = \dfrac{1}{1-\alpha} \displaystyle\int_{u_p,e_p} f m_p du_p de_p$: densité du fluide de particules
- $v = \dfrac{1}{(1-\alpha)\rho} \displaystyle\int_{u_p,e_p} f m_p u_p du_p de_p$: vitesse moyenne du fluide
- $e_c = \dfrac{1}{(1-\alpha)\rho} \displaystyle\int_{u_p,e_p} \frac{1}{2} f m_p u_p^2 du_p de_p$: énergie cinétique microscopique
- $e = \dfrac{1}{(1-\alpha)\rho} \displaystyle\int_{u_p,e_p} f m_p e_p du_p de_p$: énergie interne microscopique
- $E_p = e + e_c$: énergie totale du fluide
- $p' = \dfrac{1}{1-\alpha} \displaystyle\int_{u_p,e_p} f m_p (v - u_p) \otimes (v - u_p) du_p de_p$: tenseur de Reynolds
- $q = \dfrac{1}{1-\alpha} \displaystyle\int_{u_p,e_p} f m_p (v - u_p)^2 (u_p - v) du_p de_p$: flux thermique

Système diphasique (non clos)

Conservation de la masse:

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t((1-\alpha)\rho) + \nabla_x \cdot ((1-\alpha)\rho v) = 0$$

$\rho = \rho_p = cte$ (particules incompressibles)

Conservation du moment:

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x \cdot \ (\alpha\rho_g u_g \otimes u_g) + \alpha\nabla_x\, p = - \int\limits_{u_p, e_p} D_p(u_g - u_p) f du_p de_p$$

$$\partial_t((1-\alpha)\rho v) + \nabla_x \cdot ((1-\alpha)\rho v \otimes v) + (1-\alpha)\nabla_x p + \nabla_x \cdot \big((1-\alpha)p'\big) = - \int\limits_{u_p, e_p} D_p(u_p - u_g) f du_p de_p$$

Conservation de l'énergie totale:

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g\left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right)u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$
$$\int_{u_p,e_p} D_p(u_p - u_g)\cdot u_p f du_p de_p - \int_{u_p,e_p} 4\pi r_p \lambda Nu(T_g - T_p) f du_p de_p$$

$$\partial_t\left((1-\alpha)\rho E_p\right) + \nabla_x\cdot\left((1-\alpha)\rho\left(E_p + \frac{p+p'}{\rho}\right)v\right) + p\partial_t(1-\alpha) + \nabla_x\cdot((1-\alpha)q) =$$
$$-\int_{u_p,e_p} D_p(u_p - u_g)\cdot u_p f du_p de_p + \int_{u_p,e_p} 4\pi r_p \lambda Nu(T_g - T_p) f du_p de_p$$

Equations d'état:

$$p(t,x) = P_1(\rho_g(t,x), e_g(t,x)) \ , \ T_g(t,x) = T_1(\rho_g(t,x), e_g(t,x)) \ , \ T_p = T_2(e_p) \ ,$$

p' et q ne sont toujours pas modélisés.

Analyse dimensionnelle

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{f} + \tilde{u}_p \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} + \nabla_{\tilde{u}_p} \cdot (\tilde{f}\tilde{\Gamma}) + \partial_{\tilde{e}_p} (\tilde{f}\tilde{\phi}) = \frac{1}{\varepsilon} Q(\tilde{f}, \tilde{f})$$

avec:

- $\tilde{}$ signifie que la variable est adimensionnée
- T (resp. L): temps caractéristique (resp. longueur) du gaz
- N: nombre typique de particules dans un volume L^3
- σ: chemin libre moyen défini tel qu'on ait $N = \dfrac{L^3}{{r_p}^2 \sigma}$
- $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{L}$: nombre de Knudsen
- Mesure du nombre de Knudsen : $Kn = 0.083$

Limite hydrodynamique inélastique

On suppose que le nombre de collisions inélastiques tend vers l'infini (quand ε tend vers zéro); alors on s'attend à ce que la distribution tende vers un Dirac en vitesse et en énergie interne.

$$f_\varepsilon(t,x,u_p,e_p) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Z(t,x)\delta_{e_p=e}(e_p)\otimes\delta_{u_p=v}(u_p)$$

Conservation de la masse:

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x\cdot(\alpha\rho_g u_g) = 0$$
$$\partial_t((1-\alpha)\rho) + \nabla_x\cdot((1-\alpha)\rho v) = 0$$
$$\rho = \rho_p = cte$$

Conservation du moment:

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x\cdot(\alpha\rho_g u_g\otimes u_g) + \alpha\nabla_x p = -\frac{1}{2m_p}(1-\alpha)\rho D_p\,(u_g - v)$$
$$\partial_t((1-\alpha)\rho v) + \nabla_x\cdot((1-\alpha)\rho v\otimes v) + (1-\alpha)\nabla_x p = \frac{1}{2m_p}(1-\alpha)\rho D_p\,(u_g - v)$$

Conservation de l'énergie totale:

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g \left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right) u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$

$$\frac{1}{2m_p}(1-\alpha)\rho D_p\,(u_g - v)\cdot v - 4\pi\, r_p\,\lambda\, Nu\,(T_g - T_p)\;\frac{(1-\alpha)\rho}{m_p}$$

$$\partial_t\left((1-\alpha)\rho E_p\right) + \nabla_x \cdot \left((1-\alpha)\rho \left(E_p + \frac{p}{\rho}\right) v\right) + p\partial_t(1-\alpha) =$$

$$-\frac{1}{2m_p}(1-\alpha)\rho D_p\,(u_g - v)\cdot v + 4\pi\, r_p\,\lambda\, Nu\,(T_g - T_p)\;\frac{(1-\alpha)\rho}{m_p}$$

Equations d'état:

$$p(t,x) = P_1(\rho_g, e_g)\quad , \qquad T_g(t,x) = T_1(\rho_g, e_g)\quad , \quad T_p = T_p(e)$$

$$(p' = 0, \qquad q = 0)$$

Limite hydrodynamique élastique

On suppose que le nombre de collisions élastiques tend vers l'infini (quand ε tend vers zéro); alors on s'attend à ce que la distribution tende vers une Maxwellienne en vitesse et un Dirac en énergie interne.

$$f(t,x,e_p,u_p) = \frac{Z(t,x)}{\left(\frac{(2\pi RT(t,x))}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{m_p(u_p - v(t,x))^2}{2RT(t,x)}\right) \otimes \delta_{e_p=e}(e_p)$$

Conservation de la masse:

$$\partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g) = 0$$
$$\partial_t((1-\alpha)\rho) + \nabla_x \cdot ((1-\alpha)\rho v) = 0$$
$$\rho = \rho_p = cte$$

Conservation du moment:

$$\partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\rho_g u_g \otimes u_g) + \alpha\nabla_x p = \mathcal{M}(\rho, v, T))$$
$$\partial_t((1-\alpha)\rho v) + \nabla_x \cdot ((1-\alpha)\rho v \otimes v) + (1-\alpha)\nabla_x p + \nabla_x \left((1-\alpha)p'\right) = -\mathcal{M}(\rho, v, T)$$

Equations d'énergie:

$$\partial_t(\alpha\rho_g E_g) + \nabla_x \cdot \left(\alpha\rho_g \left(E_g + \frac{p}{\rho_g}\right) u_g\right) + p\partial_t\alpha =$$

$$\mathcal{I}(\rho, v, T) - \iint_{u_p, e_p} 4\pi r\lambda Nu(T_g - T_p)\frac{(1-\alpha)\rho}{m_p}$$

$$\partial_t\left((1-\alpha)\rho e_c\right) + \nabla_x \cdot \left((1-\alpha)(\rho e_c + p')v\right) + (1-\alpha)v \cdot \nabla_x p = -\mathcal{I}(\rho, v, T)$$

$$\partial_t\left((1-\alpha)\rho e\right) + \nabla_x \cdot \left((1-\alpha)\rho e v\right) + p\left(\partial_t(1-\alpha) + \nabla_x \cdot ((1-\alpha)v)\right) =$$

$$4\pi r\lambda Nu(T_g - T_p)\frac{(1-\alpha)\rho}{m_p}$$

Equations d'état

$$p(t,x) = P_1(\rho_g, e_g)\ ,\ T_g(t,x) = T_1(\rho_g, e_g)\ ,\ T_p = T_p(e)$$

$(q = 0, p' = \dfrac{2}{3}\rho(e_c - \dfrac{1}{2}v^2)$ pour des collisions élastiques)

Perspectives

- $\surd$ intérêt:
  - ⋆ évaluation de la validité des modèles Euler/Euler et Lagrange/Euler
  - ⋆ introduction de l'inelasticité et des échanges thermiques durant les collisions dans le code Hésione
- $\surd$ simulations en cours au CEA
- $\surd$ ajout de la turbulence sur le mouvement des particules via l'utilisation du modèle $k - \varepsilon$

Bibliographie

Modélisation des sprays

- Céline Baranger. *Modeling of oscillations, breakup and collisions for droplets: the establishment of kernels for the t.a.b. model.* 2003.
- P. Villedieu and O. Simonin. *Modeling of coalescence in turbulent gas-droplet flows.* 2004.
- Laurent Boudin, Laurent Desvillettes, and Renaud Motte. *A modeling of compressible droplets in a fluid.* Preprint CMLA, 2000.
- Philippe Laurençot and Stéphane Mischler. *Convergence to equilibrium for the continuous coagulation-fragmentation equation.* 2002.

Résultats théoriques

- Komla Domelevo. *Analyse mathématique et numérique d'une modélisation cinétique d'un brouillard de gouttelettes dans un écoulement gazeux turbulent.* Soc. Edinburgh Sect., 2001.
- T. Goudon *Asym ptotic problems for a kinetic model of two-phase-flows.* C.R. Acad. Sci. Paris t.324, 2001.
- Komla Domelevo and J.-M Roquejoffre. *Existence et stabilité d'ondes planes solutions d'un modèle cinétique d'écoulements diphasiques.* C.R. Acad. Sci. Paris t.324, 1997.
- Céline Baranger. *Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions dans les fluides complexes.* PhD thesis, E.N.S. Cachan, 2004.

Annexe: Calcul de la force de traînée dans le cas élastique

En indexant par i les différentes composantes de la force de traînée et en notant $w_i = \sqrt{\frac{RT}{m_p}}(v - u_g)_i$ on obtient après calculs,

- ✓ $\mathcal{M}(\rho, v, T)) = \iint\limits_{u_p, e_p} D_p(u_p - u_g) f du_p de_p$ vecteur de transfert de quantité de mouvement dont la $i-$ème composante est:

$$\iint\limits_{u_p, e_p} D_p(u_p - u_g)_i f du_p de_p = C_d \pi \frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{1}{r} \times$$

$$((1-\alpha)p') \left[w_i \sum_{j=1}^{3} \left(2\exp(-w_j^2) + \sqrt{(2\pi)} w_j \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_j) \right) + \sqrt{(2\pi)}\ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_i) \right]$$

√ $\mathcal{I}(\rho, v, T)) = \iint_{u_p, e_p} D_p(u_p - u_g) \cdot u_p \ f \ du_p \ de_p$: transfert d'énergie via la force de traînée :

$$\mathcal{I} = \iint_{u_p, e_p} D_p(u_p - u_g)_i (u_p)_i f du_p de_p = \sum_{1 \le i,j \le 3} C_d \pi \frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{1}{r} \left(\sqrt{\frac{RT}{m_p}} \right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\Bigg[\delta_{ij} \Bigg[2\pi \Bigg(\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{m_p}{RT}} v_i \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_2) + \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{m_p}{RT}} v_i \, w_2^2 \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_i)$$

$$+ \sqrt{2\pi} 2 w_i \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_i) \ + 4 \exp(-\frac{1}{2} w_i^{\,2}) + 2 w_i \sqrt{\frac{m_p}{RT}} v_i \exp(-\frac{1}{2} w_i^{\,2}) \Bigg) \Bigg]$$

$$+ (1 - \delta_{ij}) \times \Bigg[2\pi \Bigg(\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{m_p}{RT}} v_j \, w_i w_j \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_i) + \sqrt{2\pi} w_i \ \text{erf}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} w_i)$$

$$+ 2 \exp(-\frac{1}{2} w_i^{\,2}) + 2 w_j \sqrt{\frac{m_p}{RT}} v_j \exp(-\frac{1}{2} w_i^{\,2}) \Bigg) \Bigg] \Bigg]$$

avec δ_{ij}: symbole de Kronecker

Annexe: données physiques de l'air

Propriétés physiques de l'air:

- √ densité: $0,616\,kg.m^{-3}$
- √ longueur caractéristique: $5.10^{-3}\,m$
- √ temps caractéristique: $25.10^{-6}\,s$
- √ vitesse: $200\,m.s^{-1}$
- √ pression: $10^5\,Pa$
- √ température: $300\,^\circ K$
- √ énergie interne: $10^4\,J.kg^{-1}$
- √ chaleur spécifique: $1000\,J.kg^{-1}.K^{-1}$
- √ viscosité dynamique: $25.10^{-6}\,Pa.s$
- √ conductivité thermique: $45.10^{-3}\,W.m^{-1}.K^{-1}$